

УДК 519.61/.64:627.05

**Наталія Медвідь;
Петро Мартинюк, докт. техн. наук**

*Національний університет водного господарства та
природокористування*

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-СОЛЕПЕРЕНЕСЕННЯ НА ШВИДКІСТЬ ФІЛЬТРАЦІЇ В ГРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ (ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА)

Резюме. Сформовано математичну модель фільтрації в тілі ґрунтової греблі в тривимірному випадку з урахуванням впливу на швидкість фільтрації температури пористого середовища та концентрації хімічних речовин. Для відшукування наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано метод скінченних елементів. Це дало суттєву перевагу у тривимірному випадку, оскільки дозволило врахувати геометрію області. Виведено слабе формулювання поставленої крайової задачі. Створено програмне забезпечення для автоматизації розрахунків та відшукування чисельного розв'язку в середовищі FreeFem++. Проведено ряд чисельних експериментів та здійснено їх аналіз. Досліджено вплив тепло-солеперенесення на розподіл напорів та швидкостей фільтрації в греблі. Отримано значення температури, концентрації солей та напорів. Результати дослідження дозволять визначити місце локалізації фільтраційних руйнувань, спрогнозувати характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних із коливаннями напорів.

Ключові слова: фільтрація, тривимірний випадок, фільтраційні руйнування, коефіцієнт фільтрації, метод скінченних елементів, FreeFem++.

Natalia Medvid, Petro Martynyuk

RESEARCH OF HEAT AND SALT TRANSFER EFFECT ON FILTRATION RATE IN SOIL DAM (SPACE PROBLEM)

Summary. Mathematical model of filtration in the body of the soil dam in three-dimensional case of the effect on filtration rate, temperature and concentration of chemicals in a porous medium has been built. In the law of filtration dependence of filtering options on salt concentration and temperature has been taken into account. The free surface (dispersion curve) is fixed in time. Using mathematical and computer modeling to predict these processes makes it possible not to carry out natural experiments and thus save resources and time.

To find the approximate solution of the given boundary problem the finite element method was used and it was advantageous in three-dimensional case as it made possible to take into account the geometry of the region. In the article a weak statement of the boundary problem for equations of pressure, salt concentration and temperature, as well as relevant initial and boundary equations were derived. Software for the calculations automation and finding the numerical solution in the medium of FreeFem ++ has been developed. Besides, this free software provides opportunities for variational statement of the problem, automatic net generation basig on the Delorger-Voronyi algorithn and a wide choise of finite elements.

Some numerical experiments have been carried out and their analysis was done. The influence of salt and heat transfer on the distribution of pressures and speed of filtration in the dam has been investigated. Values of temperature, salt concentration and pressures for 360 days have been obtained. Ease of the FreeFem ++ application is caused by the possibility of visual graphs presentation as lines (surfaces) equal in values of the functions and the ability to analyze values in any point of the calculated area. The obtained results will prevent possible crashes and damages caused by the changes in pressures, as to stop the filtration destruction is almost impossible.

Key words: filtration, three-dimensional case, filtration destruction, filtration coefficient, finite element method, FreeFem ++.

Умовні позначення

$ГТС$ – гідротехнічна споруда;

$МСЕ$ – метод скінченних елементів;

$h[m]$ – напір у поровій рідині;

$c[g/l]$ – концентрація однокомпонентного хімічного розчину;

$T[^\circ C]$ – температура;

$u[m/доба]$ – вектор швидкості фільтрації;

$K[m/доба]$ – тензор коефіцієнтів фільтрації;

$K_c[m^5/kg \cdot доба]$ – тензор коефіцієнтів хімічного осмосу;

$K_T[m^2/^\circ C \cdot доба]$ – тензор коефіцієнтів термічного осмосу;

$D_c[m^2/доба]$, $D_T[kg/доба \cdot m \cdot ^\circ C]$ – тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії;

$\lambda[kДж/m \cdot ^\circ C \cdot доба]$ – тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого ґрунту;

$\rho[kg/m^3]$ – густина порового розчину;

$c_p[kДж/kg \cdot ^\circ C]$ – питома теплоємність порового розчину;

$c_T[kДж/m^3 \cdot ^\circ C]$ – об'ємна теплоємність ґрунту;

$C_m[g/l]$ – концентрація граничного насичення хімічних речовин у рідкій фазі;

σ – пористість ґрунту.

Вступ. Одним з основних завдань гідротехнічного будівництва є забезпечення безаварійної роботи гідротехнічної споруди (ГТС) за весь час її експлуатації. Стосовно ґрунтових ГТС, основна проблема як на етапі проектування, так і на етапі експлуатації – це забезпечення їх стійкості, порушення якої несе за собою економічну, екологічну та гуманітарну загрозу [1, 2]. Одним із факторів, які збільшують ризик втрати стійкості укосів ґрунтових гребель аж до повного їх руйнування, є фільтраційні руйнування пористого матеріалу греблі. В роботі [3] вказано, що половина інцидентів аварій на ґрунтових греблях пов'язана саме з фільтраційним руйнуванням. Детальний аналіз видів фільтраційного руйнування ґрунтів та математичних моделей цих процесів наведено, наприклад, у працях [4, 5].

Основними факторами фільтраційного руйнування пористих середовищ є швидкість фільтрації, яка згідно з законом Дарсі пропорційна до градієнта напорів. Тому зміна напорів відразу впливає на швидкість фільтрації. Крім того, на швидкість фільтрації впливає і зміна коефіцієнта пропорційності в законі Дарсі – коефіцієнта фільтрації. При зміні концентрації розчинених солей в поровій рідині (в межах від чистої води до концентрації граничного насичення) коефіцієнт фільтрації змінюється у 1,5 – 3 рази (як у бік збільшення, так і зменшення), а при змінах температури від $0^\circ C$ до $40^\circ C$ для деяких типів ґрунтів коефіцієнт фільтрації зростає на кілька порядків (див. [6, п. 1.2] та наведену там бібліографію). Якщо взяти до уваги явища хімічного й термічного осмосу, то виникає потреба в дослідженні впливу тепло-солеперенесення на процеси фільтрації в ґрунтах [7]. На даний час не досліджено впливу процесів тепло-солеперенесення на фільтраційні процеси в греблях у просторовому випадку. Відома статистика про аварії та інциденти на ґрунтових греблях, які пов'язані зі значними втратами матеріальних ресурсів та, що головне, людськими жертвами [8 – 10]. Зростаючий техногенний вплив людської діяльності на навколишнє середовище, техногенні аварії вимагають урахування цих факторів у гідротехнічному будівництві [11].

Розвиток теорії фільтрації в пористих середовищах займає великий часовий проміжок: від середини 19-го століття і до наших днів. Не претендуючи на повноту

огляду літератури та здобутків з даного напрямку (що неможливо в одній статті), все ж потрібно згадати класичні роботи [12 – 14]. Із сучасних робіт відзначимо [15 – 19]. Математичні моделі фільтраційних процесів в областях з вільними межами (включаючи ґрунтові греблі) в просторі проведено в роботі [20]. На складності математичних моделей, якими описуються процеси фільтрації в пористих середовищах, наголошується в роботах [21, 22]. Однак практика ставить нові задачі. Про це свідчать аварії гідротехнічних споруд [1, 3, 8 – 11], які, на жаль, все ще мають місце.

Мета роботи. Як свідчить аналіз публікацій, з визначеної проблематики є ряд невирішених задач. Одна з них – це урахування впливу тепло-солеперенесення на фільтраційні процеси в ґрунтових греблях. Адже саме величина швидкості фільтрації є основним фактором фільтраційного руйнування пористого матеріалу (ґрунту) греблі. Проведення таких прогнозних розрахунків і є метою статті. У зв'язку із згаданими у вступі залежностями коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури особливої актуальності задача набуває для гребель водойм-охолоджувачів атомних електростанцій та хвостосховищ рідких хімічних відходів.

Якщо побудова вдосконалених математичних моделей просторових задач не викликає принципових труднощів (наприклад, з роботами [5 – 7, 19, 20]), то програмна реалізація алгоритмів чисельного розв'язання відповідних нелінійних крайових задач у просторовому випадку вимагає значних затрат ресурсів та часу. Крім того, задача фільтрації в тілі ґрунтової греблі пов'язана з наявністю вільної межі (депресійної поверхні) – межі поділу між вологим та сухим ґрунтом [12, ст. 50]. У загальному випадку її (депресійної поверхні) положення є невідомим і визначається в процесі розв'язання крайової задачі. Це стосується як стаціонарних, так і нестаціонарних крайових задач. Ситуація спрощується, якщо існують вже розроблені пакети автоматизованого розв'язування відповідних крайових задач, які вимагають модифікації програмного коду. Одним з таких безкоштовних пакетів є FreeFem++[23], який дозволяє розв'язувати крайові задачі методом скінченних елементів [24, 25]. Тому ще однією ціллю статті є адаптація вказаного пакета для розв'язування нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних у просторі в областях з вільними межами.

Постановка задачі та її математична модель. Розглянемо тривимірну задачу фільтрації в тілі ґрунтової греблі, яка зображена на рис. 1. З математичної точки зору, гребля – це тривимірний об'єкт Ω з межами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ та вільною межею Γ_0 . На рис. 1 ребра області Ω для зручності зображено прямими лініями. Це не зменшує загальності задачі, оскільки вони можуть бути і криволінійними.

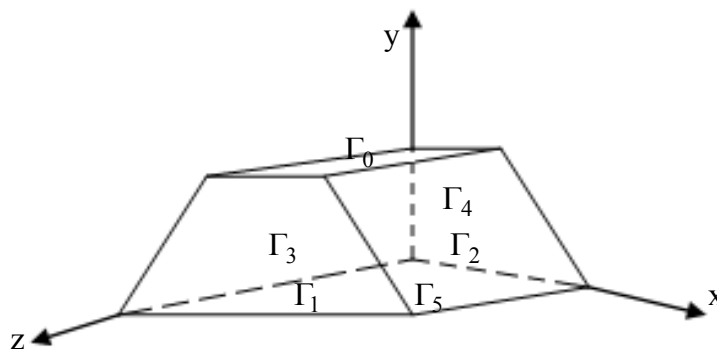


Рис.1. Тіло ґрунтової греблі

Fig.1. Body of soil dam

Стосовно фільтрації, розглянемо квазістаціонарний процес (див. наприклад [12, глава 2, п. 2; 19, 20]). Розгляд нестационарних фільтраційних процесів (як пружний режим фільтрації [13], процеси фільтраційної консолідації [5, 6, 16, 17] тощо) стане темою наступних публікацій авторів в даному напрямку. Зроблене припущення дозволяє розглядати вільну поверхню (межу поділу гравітаційної води і повітря в пористому середовищі [22, ст. 10]) нерухомою в часі [12, глава 2]. В загальному випадку її положення є невідомим і має визначатись у процесі розв'язку задачі (огляд алгоритмів визначення положення вільних меж наведено в [26]). Тоді математична модель тривимірної задачі фільтрації через тіло ґрунтової греблі на непроникній основі з урахуванням впливу тепло-солеперенесення містить такі рівняння [5, 6, 27, 28]:

- квазістаціонарне рівняння фільтрації

$$\nabla \cdot (K(c, T) \nabla h) - \nabla \cdot (K_c \nabla c) - \nabla \cdot (K_T \nabla T) = 0, \quad (1)$$

- рівняння солеперенесення

$$\nabla \cdot (D_T^{(c)} \nabla T) + \nabla \cdot (D_c \nabla c) - \mathbf{u} \nabla c = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

- рівняння теплоперенесення

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

- закон фільтрації, в якому враховано залежність параметрів фільтрації від концентрації солей та температури, а також явища осмосу [5, 6]

$$\mathbf{u} = -K(c, T) \nabla h + K_c \nabla c + K_T \nabla T.$$

Вказані рівняння доповнюються початковими і граничними умовами

$$\begin{aligned} (u, n)|_{\Gamma_0} &= 0, \quad c(X, 0) = C_0(X), \quad T(X, 0) = T_0(X), \\ h(X)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} &= y, \quad X \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, \quad h(X)|_{\Gamma_2} = H_1(X), \quad X \in \Gamma_2, \quad (\nabla h, n)|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0, \quad X \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\ c(X, t)|_{\Gamma_1} &= C_1, \quad X \in \Gamma_1, \quad c(X, t)|_{\Gamma_2} = C_m(X, t), \quad X \in \Gamma_2, \\ (D_c \nabla c + D_T \nabla T, n)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} &= 0, \quad X \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \quad (\nabla c, n)|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0, \quad X \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\ T(X, t)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} &= T_{амм}(X, t), \quad X \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (\nabla T, n)|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} = 0, \quad X \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \end{aligned}$$

де $H_1(X), C_0(X), C_1(X, t), C_m(X, t), T_0(X), T_{амм}(X, t)$ – відомі функції.

Для відшукування наближеного розв'язку сформованої нелінійної крайової задачі використаємо метод скінченних елементів (МСЕ). Він полягає в тому, що апроксимуючі функції відмінні від нуля на окремих підобластях (скінченних елементах, більш конкретно – тетраедрах), на які розбивається вся область розв'язку [23 – 25].

Слабке формулювання крайової задачі. Домножимо рівняння (1) на пробну функцію $v(X) \in H_0 = \{v(X) : v(X) \in W_2^1(\Omega), v(X)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$ і проінтегрувавши отриману рівність по області Ω , отримаємо

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T) \nabla h)) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)) \cdot \mathbf{v}(X) d\Omega = 0.$$

Застосувавши формулу Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial h}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma - \iiint_{\Omega} (\mathbf{K}(c, T) \nabla h \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \\ + \iiint_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla c \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \iiint_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla T \nabla \mathbf{v}) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$. Оскільки $\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial h}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = 0$, з (4)

маємо

$$\iiint_{\Omega} (\mathbf{K}(c, T) \nabla h \nabla \mathbf{v}) d\Omega - \iiint_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla c \nabla \mathbf{v}) d\Omega - \iiint_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla T \nabla \mathbf{v}) d\Omega = 0. \quad (5)$$

Домножимо рівняння (2) на пробну функцію $v_1(X) \in H_0 = \{v_1(X) : v_1(X) \in W_2^1(\Omega), v_1(X)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$ і отримаємо

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(c)} \nabla T) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \nabla c) \cdot v_1(X) d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma \frac{\partial c}{\partial t} \cdot v_1(X) d\Omega.$$

Аналогічно, як і в (4), застосовуючи формулу Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\iiint_{\Omega} (\mathbf{D}_T^{(c)} \nabla T \nabla v_1) d\Omega + \iiint_{\Omega} (\mathbf{D}_c \nabla c \nabla v_1) d\Omega - \iiint_{\Omega} (\mathbf{u} \nabla c \cdot v_1) d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma \left(\frac{\partial c}{\partial t} v_1 \right) d\Omega. \quad (6)$$

Домноживши рівняння (3) на пробну функцію $v_2(X) \in H_0 = \{v_2(X) : v_2(X) \in W_2^1(\Omega), v_2(X)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0\}$, проінтегрувавши по області Ω та застосовуючи формулу Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\iiint_{\Omega} (\lambda \nabla T \nabla v_2) d\Omega - \iiint_{\Omega} (\rho c_p \mathbf{u} \nabla T \cdot v_2) d\Omega = \iiint_{\Omega} c_T \left(\frac{\partial T}{\partial t} v_2 \right) d\Omega. \quad (7)$$

З початкових умов для функцій концентрації солей та температури маємо

$$\iiint_{\Omega} c(X, 0) \cdot v_1(X) d\Omega = \iiint_{\Omega} C_0(X) v_1(X) d\Omega, \iiint_{\Omega} T(X, 0) \cdot v_2(X) d\Omega = \iiint_{\Omega} T_0(X) v_2(X) d\Omega. \quad (8)$$

Для відшукування наближеного узагальненого розв'язку із задачі (5) – (8) потрібно застосовувати дискретизацію в часі. Можна використати, наприклад, схему предиктор-коректор [22] або повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [6].

Результати дослідження. Вхідні дані:

$$\begin{aligned}\sigma &= 0.4, \rho = 1100 \text{ кг/м}^3, C_m = 160 \text{ г/л}, D_C = 0.001 \text{ м}^2/\text{доба}, D_T = 0.0001 \text{ кг/доба} \cdot \text{м} \cdot ^\circ\text{C}, \\ K_C &= 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, K_T = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/^\circ\text{C} \cdot \text{доба}, c_T = 2137 \text{ кДж/м}^3 \cdot ^\circ\text{C}, \\ c_\rho &= 4,2 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}, \lambda = 108 \text{ кДж/м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{доба}, T_0(x) = 4^\circ\text{C}, T_{\text{атм}} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi}{180}\right), \\ C_0(x) &= 8 \text{ г/л}, C_1(t) = 8 \text{ г/л}, C_m = 160 \text{ г/літр}.\end{aligned}$$

Вільна поверхня на початковому часовому шарі покладалася паралельною до осі Ox і задавалася рівнянням $y = 30 \text{ м}$.

Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів [23]. Цей безкоштовний програмний продукт, поміж іншого, надає можливості варіаційного формулювання проблеми, автоматизації генерування сітки на основі алгоритму Делоне-Вороного та великий вибір скінченних елементів. Також даний пакет містить вмонтовані алгоритми апроксимації вільних меж.

В якості модельної задачі з фізичної точки зору розглянуто процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі хвостосховища при концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі на рівні 160 г/літр . При цьому враховані сезонні коливання температури від $T_{\text{max}} = 30^\circ\text{C}$ до $T_{\text{min}} = 4^\circ\text{C}$ на межі контакту греблі із атмосферою. Розміри греблі: висота греблі – 30 м , ширина верхньої межі – 20 м , ширина нижньої межі – 80 м , довжина греблі – 20 м . Апроксимаційна залежність коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації розчинених солей взята з роботи [5]. Коефіцієнт фільтрації чистої води $k_0 = 1 \text{ м/доба}$. Отримані значення температури, концентрації солей, швидкості фільтрації та напорів на момент часу 360 діб (час вибрано для прикладу, але в загальному випадку шукані функції можна відобразити для будь-якого скінченного моменту часу), відображені на графіках 2 – 6. Зручність застосування FreeFem++ зумовлюється ще й можливістю візуалізації представлення графіків у вигляді ліній (площин) рівних значень шуканих функцій (що й відображено на рис. 2 – 6) та можливістю аналізу значень в будь-якій точці розрахункової області. Крім того, задача покриття області геометричною сіткою скінченних елементів розв'язується автоматично й від користувача вимагається задавання лише рівнянь межі області, в якій шукається наближений розв'язок крайової задачі.

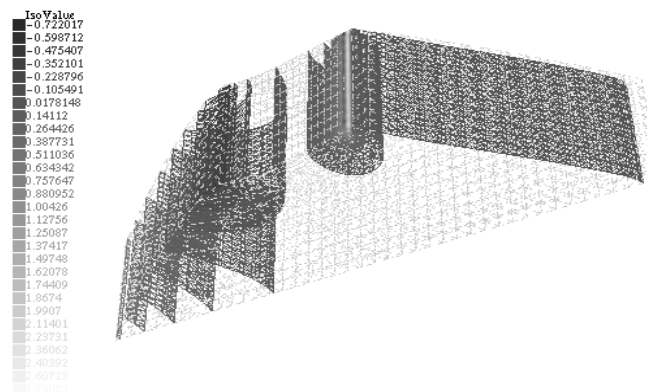


Рис. 2. Розподіл різниці напорів без урахування та з урахуванням впливу тепло-солеперенесення

Fig. 2. Distribution of the pressures difference without and taking into account the heat and salt transfer effect

На рисунку 2 зображено розподіл різниці напорів без урахування та з урахуванням впливу тепло-солеперенесення (рис. 3) на момент часу 360 діб. Бачимо, що різниця напорів лежить у межах від -0,722017 м до 2,85384 м. Тобто врахування теплових та хімічних факторів впливу зумовлює відхилення у значеннях напорів з амплітудою близько 3,5 м. Такі коливання напорів зумовлюються урахуванням осмотичних явищ та нелінійною залежністю коефіцієнта фільтрації від концентрації солей і температури. Причому, ці залежності є немонотонними. А тому спрогнозувати вплив тепло-солеперенесення в часі на розподіл напорів неможливо простим аналізом залежностей, а лише на основі чисельних експериментів.

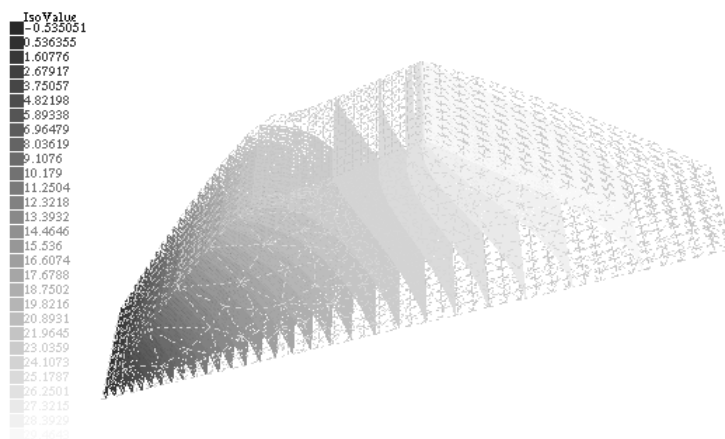


Рис. 3. Розподіл напорів з урахуванням впливу тепло-солеперенесення

Fig. 3. Distribution of pressures taking into account the heat and salt transfer

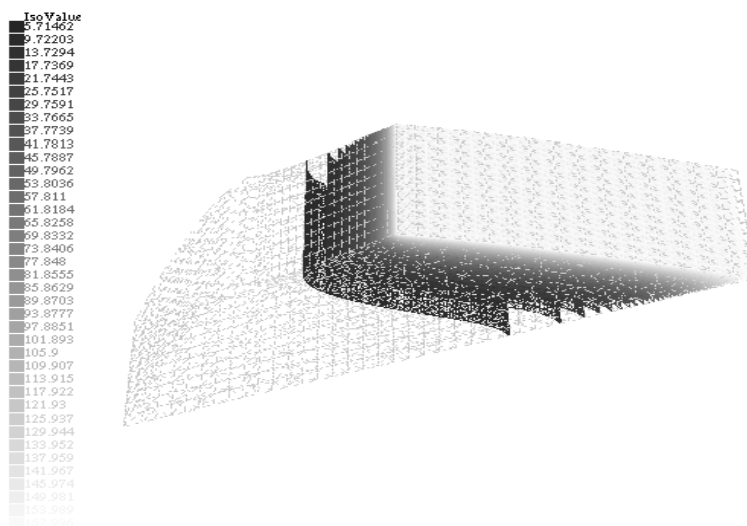


Рис. 4. Розподіл концентрації солей

Fig. 4. Distribution of salts concentrations

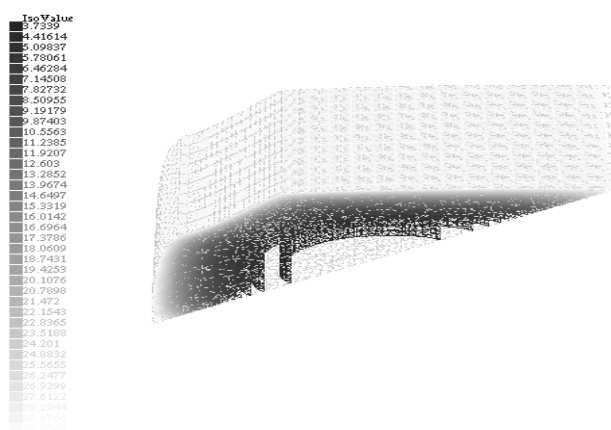


Рис. 5. Розподіл температури

Fig. 5. Temperature distribution

Для можливості аналізу впливів тепло-солеперенесення на розподіл напорів в тілі греблі на рис. 4, 5 наведено розподіл хімічного та температурного полів на момент часу $t = 360$ діб.

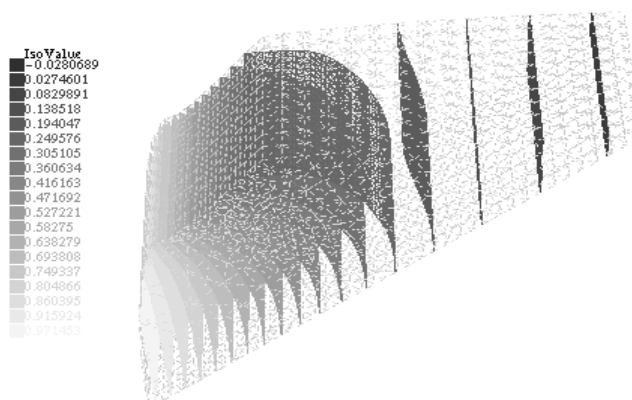


Рис. 6. Розподіл різниці швидкостей фільтрації з урахування впливу тепло-солеперенесення та без нього відповідно

Fig. 6. Distribution of the filtration rate difference taking into account and without it the heat and salt transfer effect

Загальною метою запланованого авторами циклу статей є математичне та комп'ютерне моделювання процесів фільтраційного руйнування матеріалу ГТС у тривимірному випадку. В роботах [5 – 7] такі дослідження проведено лише для двовимірної задачі, що не може повністю врахувати геометрію областей розмиву ґрунту фільтраційним потоком порової рідини. Критерієм розмиву пористого матеріалу є перевищення швидкістю фільтрації деякого критичного значення [5]. Тому з практичної точки зору більш інформативною є картина різниці в розподілах швидкостей фільтрації у випадку урахування та без урахування впливу тепло-солеперенесення. Така різниця на момент часу 360 діб відображена на рис.6. Бачимо, що різниця швидкостей лежить у межах від $-0,0280689$ м/доба до $0,971453$ м/доба. Тобто врахування теплових та хімічних факторів впливу зумовлює відхилення у значеннях швидкості фільтрації з амплітудою близько 1 м/доба. Подальші дослідження

таких коливань швидкості фільтрації на виникнення та еволюцію зон фільтраційного руйнування в ГТС будуть становити суть окремих робіт авторів у даному напрямку.

Висновки. Сформовано математичну модель просторових фільтраційних процесів у тілі греблі з урахуванням впливу тепло-солеперенесення. Для чисельного дослідження нелінійної крайової задачі використано МСЕ і це дало суттєву перевагу у тривимірному випадку. Використання пакета FreeFem++ дозволило автоматизувати процеси тетраедризації тіла ґрунтової греблі, автоматично врахувати зміну положення вільної межі, повністю автоматизувати чисельне інтегрування та розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Проведені чисельні експерименти з дослідження модельної задачі фільтрації в греблі хвостосховища показують, що врахування тепло-солеперенесення змінює розподіл напорів з різницею від -0,722017 м до 2,85384 м. Амплітуда коливань швидкості фільтрації складає близько 1 м/доба. А це може стати причиною фільтраційних руйнувань гребель. Тому результати експериментів потрібно враховувати при проектуванні й конструюванні ґрунтових гребель, що можуть перебувати в умовах техногенних навантажень (греблі водойм-охолоджувачів АЕС, греблі хвостосховищ тощо). Отримані результати дозволять попередити характер можливих аварій та пошкоджень, пов'язаних зі змінами напорів, оскільки зупинити фільтраційні руйнування, що почалися, практично неможливо [5].

Подальші дослідження авторів статті будуть стосуватися кількох напрямків. По-перше, це теоретичне дослідження точності скінченноелементних розв'язків розглянутих нелінійних крайових задач. По-друге, це врахування наявності в греблях інженерних конструкцій (наприклад, водоводів), а також дослідження нестационарних задач фільтрації та динамічної зміни областей розмиву.

Conclusions. Mathematical model of space filtration processes in the body of the dam taking into account the heat and salt transfer effect, has been stated. For numerical investigation of nonlinear boundary problem the finite element method was used and it gave a significant advantage in the three-dimensional case. Using the FreeFem++ package made possible to make the processes of tetrahedrons soil dam body automatic, to calculate automatically the change in position of the free border, to automate completely numerical integration and solving the systems of linear algebraic equations. Carried out numerical experiments for research of the model problems of filtration in the tailing dump dam testify that taking into account the heat and salt transfer changes the distribution of pressures, since the difference lies in the range of -0.722017m to 2,85384m. The amplitude of filtration rate is about 1 m/day. This can cause the filtration damage of dams. Therefore, the results of experiments should be considered when designing and constructing soil dam that can be in terms technogenic pressures. The obtained results will prevent possible crashes and damages caused by the changes in pressures, as to stop the filtration destruction is almost impossible.

Further researches are to be in some directions: first – theoretical research of the finite element solutions accuracy of examined nonlinear boundary value problems; secondly – taking into account the presence of engineering structures in the dams (e.g. pipe – lines), as well as research of non-stationary filtration problems and dynamic changes of washed areas.

Список використаної літератури

1. Красильников, Н.А. Сопоставительные исследования методов расчета устойчивости откосов и уровня риска аварий ґрунтовых плотин при оценке их надежности и безопасности в эксплуатационный период [Текст] / Н.А. Красильников, Н.Ф. Арипов, В.Ф. Корбашов // Гидротехническое строительство. – 2004. – Вип. 5. – С. 6 – 10.
2. Громадченко, Т.В. Математичне моделювання впливу вологоперенесення на стійкість зсувонебезпечного масиву ґрунту [Текст] / Т.В. Громадченко, П.М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2012. – Вип. 7. – С. 49 – 55.
3. Foster, M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by internal erosion and piping // 20th Congress on Large Dams. – Beijing, 2000. – Pp. 237 – 259.

4. Чугаев, Р.Р. Гидротехнические сооружения. Ч.1. Глухие плотины [Текст] / Р.Р. Чугаев. – М.: Агропромиздат, 1985. – 318 с.
5. Власюк, А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій [Текст] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
6. Власюк, А.П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах [Текст] / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.
7. Власюк, А.П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах [Текст] / А.П. Власюк, О.П. Остапчук. – Рівне: НУВГП, 2015. – 214 с.
8. Гогоберидзе, М.И. Обобщение данных статистического анализа аварий и инцидентов в аспекте надежности плотин [Текст] / М.И. Гогоберидзе и др. // Сообщения АН Груз. ССР. – 1977. – Вип. 86, № 3. – С. 681 – 684.
9. Малик, Л.К. Чрезвычайные ситуации, связанные с гидротехническим строительством (ретроспективный обзор) [Текст] / Л.К. Малик // Гидротехническое строительство. – 2009. – № 12. – С. 2 – 16.
10. Малик, Л.К. Факторы риска повреждения гидротехнических сооружений. Проблемы безопасности [Текст] / Л.К. Малик. – М.: Наука, 2005. – 354 с.
11. Багрова, Л.А. Опасные техногенные катастрофы в энергетике как факторы экологического риска [Текст] / Л.А. Багрова, В.А. Боков, А.С.-А. Мазинов // Учетные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия «География». – 2012. – Т. 25 (64), № 2. – С. 9 – 19.
12. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
13. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967). – М.: Наука, 1969. – 545 с.
14. Bear, J. Dynamics of fluids in porous media / J. Bear. – New York: Dover Publications, 2013. – 784 p.
15. Variable-Pressure /Variable-Rate Expression of Semisolid Materials / T. Murase, M. Iwata, M. Wakita, T. Adachi, N. Hagashi, M. Shirato // J. Chem. Eng. Jap. – 1987. – 20 (6). – 603 p.
16. Petryk, M. Liquid Flowing from Porous particles During the Pressing of Biological Materials / M. Petryk, E. Vorobiev // Computer & Chem. Eng. Elsevier Irland. – 2007. – Issue 31. – P. 1336 – 1345.
17. Petryk, M. Numerical and analytical modeling of solid-liquid expression from soft plant materials / M. Petryk, E. Vorobiev // AIChE Journal. – 2013. – Vol. 59, Is. 12. – P. 4762 – 4771.
18. Progress in filtration and separation /Edited by Steve Tarleton. – Elsevier, 2015. – 684 p.
19. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних [Текст] / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк, А.П. Сафоник, О.А. Фурсачик. – Рівне: НУВГП, 2011. – 276 с.
20. Бомба, А.Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у пористих середовищах з вільними межами [Текст] / А. Бомба, В. Гаврилюк, А. Тербуш // Вісник ТНТУ. Серія: Математичне моделювання. Математика. Фізика. – 2011. – Т. 16, № 4. – С. 168 – 177.
21. Ляшко, И.И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах [Текст] / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий. – Киев: Накова думка, 1991. – 264 с.
22. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах [Текст] / И.В. Сергиенко, В.В. Скопечкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
23. FreeFem++. Third Edition / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau, J. Morice, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka. – Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universite Pierre et Marie Curie, Paris. – 378 p (режим доступу: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>).
24. Савула, Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами [Текст] / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
25. Трушевський, В.М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування [Текст] / В.М. Трушевський, Г.А. Шинкаренко, Н.М. Щербина. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2014. – 396 с.
26. Бураго, Н.Г. Обзор контактных алгоритмов [Текст] / Н.Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов // Известия РАН, МТТ, 2005. – N. 1. – С. 45 – 87.
27. Медвідь, Н.В. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом [Текст] / Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – 2014. – Випуск 10. – С. 101 – 112.
28. Мартинюк, П.М. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом [Текст] / П.М. Мартинюк, Н.В. Медвідь // Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції. – Рівне, 2013. – С. 105.

Отримано 10.09.2015